

# 复多项式微分系统的广义中心问题和可积性\*

郭珂珂, 张齐

(中南大学数学与统计学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:** 研究一类广泛的复自治多项式微分系统初等共振奇点的广义中心问题。引入了一种新的方法(积分因子法)来判定任何具有有理共振比的共振奇点的广义中心,并得到一个计算鞍点量的递推公式;找到了鞍点量与广义奇点量之间的关系,弥补了肖萍博士论文中的一个缺陷。

**关键词:** 共振奇点; 广义中心; 积分因子; 广义奇点量

**中图分类号:** 0175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 03-0054-06

## Generalized center problem and integrability of complex polynomial differential system

GUO Keke, ZHANG Qi

(School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** The generalized center problem of elementary resonant singular point for an extensive class of complex autonomous polynomial differential system in  $C^2$  is studied. A new method (integrating factor method) is introduced to determine generalized center of resonant singular point for any rational resonance ratio. A recursion formula of calculating saddle point quantities is obtained and the relation of the saddle point quantity and the generalized singular point quantity is given. A gap in Doctoral thesis of Ping Xiao is fixed.

**Key words:** resonant singular point; generalized center; integrating factor; generalized singular point quantity

经典的平面多项式微分系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(x, y), \frac{dy}{dt} = x + Q(x, y)$$

的中心问题是寻找  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  的系数满足的条件,使原点的邻域由系统的周期解覆盖。关于该问题的研究仅在  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  为二次和三次齐次多项式的情况下分别由 Dulac 与 Sibirskii 解决。在  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  的其它情形一直是悬而未决的公开问题。但其中不乏优秀的成果<sup>[1-3]</sup>。与中心问题密切相关的是平面多项式微分系统的积分问题。

最近,文 [4] 把经典的中心问题推广到  $p: -$

$q$  共振的情形:

$$\frac{dx}{dt} = px + P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -qy + Q(x, y)$$

寻找  $p: -q$  共振中心必要条件通常有两种方法。第一种是形式级数法,即逐项确定假设的形式首次积分  $H(x, y) = x^q y^p + \dots$  的泰勒展开式的各项,使  $\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x^q y^p)^{k+1}$ 。此形式首次积分存在的必要条件是形式级数定义的各阶鞍点量  $g_k$  为零。用此

\* 收稿日期: 2017-10-09

基金项目: 中南大学创新驱动计划 (1053320181605)

作者简介: 郭珂珂 (1991年生), 女; 研究方向: 微分方程与动力系统; E-mail: 2425501895@qq.com

方法判断原点是否为共振中心涉及到鞍点量  $g_k$  的计算。另一种方法是规范形法，它需要计算由规范形定义的所谓的广义奇点量<sup>[5-6]</sup>。

关于共振奇点广义中心条件的研究有不少有趣的工作。当  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  是特殊的实或复多项式且共振比  $p: -q$  是特定的值时，系统存在局部解析首次积分  $H(x, y) = x^q y^p + \dots$ （即存在  $p: -q$  共振中心）的条件已有不少的研究。二次多项式的情形有文 [4 - 13]；三次的情形有文 [14 - 20]；四次情形有文 [21 - 22]；五次情形有文 [23]。但是当共振比是一般的值时，即使是二次系统，共振中心问题仍然是一个公开问题。

值得一提的是，在文 [5] 中，肖和刘提出了一种比较容易的计算鞍点量的方法（在文 [5] 中称为广义奇点量）。他们考虑了以下一般的复自治微分系统

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = pz + \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = Z, \\ \frac{dw}{dt} = -qw - \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta = -W \end{cases} \quad (1)$$

其中  $z, w, T$  是独立的复变量， $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  是复常数， $p, q \in \mathbf{Z}^+$ ,  $(p, q) = 1$ 。作者通过系统 (1) 的规范形给出了广义奇点量的定义，并运用形式级数，得到了一个计算鞍点量的线性递归公式。但是，文 [5] 有一个缺陷，作者直接将形式级数得到的鞍点量作为从规范形定义的广义奇点量，而没有证明它们的等价性。因此本文的其中一个目的就是填补这个空缺。我们首先证明了广义奇点量和鞍点量的等价性，换句话说，证明了形式级数法和规范形法的等价性。然后引入一种计算广义共振奇点量的方法——积分因子法，并由此判定广义中心。我们还得到了计算系统 (1) 原点的广义奇点量的另一递归公式。

### 1 预备知识

**引理 1**<sup>[5,7]</sup> 对于系统 (1)，我们可以逐项确定以下形式级数

$$\begin{cases} u = z + \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} A_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \\ v = w + \sum_{\alpha+\beta=2}^{\infty} B_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta \end{cases} \quad (2)$$

使系统 (1) 转换成其规范形：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = pu \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u^q v^p)^k \\ \frac{dv}{dt} = -qv \sum_{k=0}^{\infty} q_k (u^q v^p)^k \end{cases} \quad (3)$$

其中  $p_0 = q_0 = 1$ 。

设  $H = u^q v^p, \mu_k = p_k - q_k$ ，那么由规范形 (3) 可得

$$\frac{dH}{dt} = pq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m H^{m+1} \quad (4)$$

**定义 1**<sup>[5-6]</sup> 对于系统 (1)，我们称  $\mu_k = p_k - q_k$  为“原点的第  $k$  阶广义奇点量”。如果  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$ ，则原点称为  $k$  阶奇点；如果对所有  $k$  都有  $\mu_k = 0$ ，则原点称为复共振中心。

**注 1** 有些作者也把广义奇点量称为鞍点量<sup>[7,11]</sup>。为了区别由形式级数法和规范形法得到的鞍点量，本文采用文 [5] 中方法把由规范形法得到的鞍点量称为广义奇点量。

**定理 1**<sup>[5]</sup> 对于系统 (1)，可以逐项确定以下形式级数

$$F(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=p+q}^{\infty} c_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = z^q w^p + \dots \quad (5)$$

使得

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (z^q w^p)^{m+1} \quad (6)$$

其中  $c_{qp} = 1, c_{kq, kp} = 0, k = 2, 3, \dots$ 。当  $\alpha + \beta > p + q$ ，且  $q\beta - p\alpha \neq 0$  时有

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{k+j \geq 3} [(\alpha + q - k + 1)a_{k, j-1} - (\beta + p - j + 1) \cdot b_{j, k-1}] c_{\alpha-k+1, \beta-j+1} / (q\beta - p\alpha) \quad (7)$$

$$\lambda_m = \sum_{k+j \geq 3} [(qm - k + q + 1)a_{k, j-1} - (pm - j + p + 1)b_{j, k-1}] c_{qm-k+1, pm-j+1} \quad (8)$$

### 2 主要结果

**定理 2** 对于系数为系统 (1) 的系数  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  的多项式的任意形式级数

$$G_m(z, w) = (z^q w^p)^{m+1} + h. o. t., \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

以及任意预先给定的  $c_{kq, kp} (k = 1, 2, \dots)$ ，可以逐项确定唯一的形式级数

$$F(z, w) = z^q w^p + \sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} c_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \quad (10)$$

使其系数也是  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  的多项式，且

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m G_m(z, w) \quad (11)$$

此外，如果  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$ ，则  $\lambda_1$

$$= \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0, \lambda_k \neq 0, \\ \lambda_k = pq\mu_k (k = 1, 2, \cdots) \quad (12)$$

反之亦然。

**证明** 定理的前半部分和式 (11) 通过直接计算很容易证明, 在此从略。现证明另一半和式 (12)。运用形式级数 (2),  $F(z, w)$  和  $G_m(z, w)$  可以写成

$$F = u^q v^p + \sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} C_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta, \\ G_m = (u^q v^p)^{m+1} + \sum_{\alpha+\beta=(m+1)(p+q)+1}^{\infty} d_{\alpha\beta}^{(m)} u^\alpha v^\beta \quad (13)$$

设

$$\tilde{G}_m = (u^q v^p)^{m+1} + \sum_{k=m+2}^{\infty} d_{kq, kp}^{(m)} u^{kq} v^{kp} \quad (14)$$

其中  $\{d_{kq, kp}^{(m)}\}$  是  $\{d_{\alpha\beta}^{(m)}\}$  的子序列, 因而  $\tilde{G}_m$  是  $G_m$  中含有某些特殊项的部分。因为  $H = u^q v^p$ , 我们也可以简化式 (14) 为

$$\tilde{G}_m = H^{m+1} g_m(H) \quad (15)$$

其中  $g_m(H)$  是  $H$  的幂级数, 且  $g_m(0) = 1$ 。此外, 由规范形 (3) 和等式 (13) 可得

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1)} = p(qu^q v^p + \sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} \alpha C_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) \cdot \\ (1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m (u^q v^p)^m) - \\ q(pu^q v^p + \sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} \beta C_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) \cdot \\ (1 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m (u^q v^p)^m) \quad (16)$$

一方面, 设

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} d_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (17)$$

归纳等式 (16) - (17) 可得

$$\sum_{k=2}^{\infty} d_{kq, kp} u^{kq} v^{kp} = p(qu^q v^p + \sum_{k=2}^{\infty} kq C_{kq, kp} u^{kq} v^{kp}) \cdot \\ (1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m (u^q v^p)^m) - q(pu^q v^p + \\ \sum_{k=2}^{\infty} kp C_{kq, kp} u^{kq} v^{kp}) (1 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m (u^q v^p)^m) = \\ pqg(H) \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m H^{m+1} \quad (18)$$

其中  $g(H) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k C_{kq, kp} H^{k-1}$ 。

另一方面, 由形式级数 (2) 和式 (11), 又可得

$$\sum_{\alpha+\beta=p+q+1}^{\infty} d_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m G_m \quad (19)$$

因此,

$$\sum_{k=2}^{\infty} d_{kq, kp} u^{kq} v^{kp} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \tilde{G}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m H^{m+1} g_m(H) \quad (20)$$

综合式 (18) 与式 (20) 得

$$pqg(H) \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m H^{m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m H^{m+1} g_m(H) \quad (21)$$

由式 (21) 可知: 如果  $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$ , 则有  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0, \lambda_k \neq 0$ , 且式 (12) 成立。

定理 2 从理论上证实了: 除了可能相差一个常数因子外, 由定理 1 通过形式级数法得到的鞍点量恰是系统 (1) 原点的广义奇点量。

**推论 1** 系统 (1) 在原点可积, 从而存在一个解析的首次积分, 当且仅当原点是广义中心。

**定理 3** 对于系统 (1), 我们可以逐项确定以下形式级数

$$J(z, w) = z^{q-1} w^{p-1} + \cdots = z^{q-1} w^{p-1} \sum_{\alpha+\beta \geq 0} \tilde{c}_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \quad (22)$$

其中系数  $\tilde{c}_{\alpha\beta}$  是系统 (1) 的系数  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  的多项式,  $\tilde{c}_{kq, kp} (k = 1, 2, \cdots)$  可任取, 且

$$\frac{\partial(JZ)}{\partial z} - \frac{\partial(JW)}{\partial w} = z^{q-1} w^{p-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k (z^q w^p)^k \quad (23)$$

此外, 如果  $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$ , 则有  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0, \lambda_k \neq 0$ ,

$$\lambda'_k = pq(k+1)\mu_k = (k+1)\lambda_k (k = 1, 2, \cdots) \quad (24)$$

反之亦然。

**证明** 我们将在下一个定理中详细证明  $J(z, w)$  的存在。首先证明式 (24) 成立。

令

$$Z^* = JZ - \frac{1}{2} \int_0^z z^{q-1} w^{p-1} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (z^q w^p)^m dz = \\ z^{q-1} w^{p-1} (pz + \cdots), \\ W^* = JW + \frac{1}{2} \int_0^w z^{q-1} w^{p-1} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (z^q w^p)^m dw = \\ z^{q-1} w^{p-1} (qw + \cdots) \quad (25)$$

由式 (23) 和式 (25) 可得

$$\frac{\partial Z^*}{\partial z} - \frac{\partial W^*}{\partial w} = 0 \quad (26)$$

因而再有式 (25) - (26) 可知, 存在一个形式幂级数  $F = z^q w^p + \cdots$ , 使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= JW + \frac{1}{2} \int_0^w z^{q-1} w^{p-1} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (z^q w^p)^m dw, \\ \frac{\partial F}{\partial w} &= JZ - \frac{1}{2} \int_0^z z^{q-1} w^{p-1} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (z^q w^p)^m dz \end{aligned} \quad (27)$$

由式 (27)，做形式计算可得

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m G_m(z, w) \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} G_m(z, w) &= \frac{1}{2} (Z \int_0^w z^{q-1} w^{p-1} (z^q w^p)^m dw + \\ &W \int_0^z z^{q-1} w^{p-1} (z^q w^p)^m dz) = \\ &\frac{(z^q w^p)^{m+1}}{m+1} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

由定理 2，式 (28) - (29) 易得如果  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$ ，则  $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_{k-1} = 0, \lambda_k \neq 0$ ，且式 (24) 成立。

**定理 4** 对系统 (1)，可以逐项确定形式级数 (22)，使等式 (23) - (24) 成立。此外，若  $p\alpha = q\beta, \tilde{c}_{\alpha\beta}$  可任取；若  $p\alpha \neq q\beta$ ，且  $\tilde{c}_{00} = 1$ ，则当  $m \geq 1$  时有

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{q\beta - p\alpha} \sum_{k+j \geq 3} [(\alpha + q)a_{k,j-1} - \\ &(\beta + p)b_{j,k-1}] \tilde{c}_{\alpha-k+1, \beta-j+1} \quad (30) \\ \lambda'_m &= (m+1) \sum_{k+j \geq 3} (qa_{k,j-1} - pb_{j,k-1}) \tilde{c}_{qm-k+1, pm-j+1} \quad (31) \end{aligned}$$

其中当  $k < 0$  或  $j < 0$  时， $a_{kj} = b_{kj} = c_{kj} = 0$ 。

**证明** 将  $Z, W$  表示为

$$\begin{aligned} Z(z, w) &= pz + \sum_{k+j \geq 3} a_{k,j-1} z^k w^{j-1}, \\ W(z, w) &= qw + \sum_{k+j \geq 3} b_{j,k-1} z^{k-1} w^j \end{aligned} \quad (32)$$

则有

$$\begin{aligned} H_2 &= (86\ 181\ 882\ 389\ 200\ 000 a_{11}^4 a_{20}^6 - 111\ 893\ 045\ 871\ 065\ 000 a_{11}^4 a_{20}^5 b_{11} - 68\ 647\ 247\ 890\ 398\ 750 a_{11}^4 a_{20}^4 b_{11}^2 + \\ &1\ 135\ 433\ 220\ 719\ 934\ 375 a_{11}^4 a_{20}^3 b_{11}^3 - 2\ 114\ 779\ 376\ 229\ 018\ 750 a_{11}^4 a_{20}^2 b_{11}^4 + \\ &1\ 334\ 410\ 249\ 380\ 080\ 625 a_{11}^4 a_{20} b_{11}^5 - 270\ 287\ 286\ 401\ 632\ 500 a_{11}^4 b_{11}^6 - \\ &85\ 266\ 015\ 503\ 500\ 000 a_{11}^3 a_{20}^6 b_{20} + 482\ 672\ 288\ 556\ 410\ 000 a_{11}^3 a_{20}^5 b_{11} b_{20} - 446\ 855\ 864\ 834\ 265\ 000 a_{11}^3 a_{20}^4 b_{11}^2 b_{20} \\ &- 1\ 966\ 034\ 606\ 926\ 635\ 000 a_{11}^3 a_{20}^3 b_{11}^3 b_{20} + 3\ 706\ 812\ 308\ 086\ 363\ 125 a_{11}^3 a_{20}^2 b_{11}^4 b_{20} - \\ &2\ 092\ 379\ 459\ 878\ 788\ 750 a_{11}^3 a_{20} b_{11}^5 b_{20} + 373\ 023\ 560\ 336\ 203\ 125 a_{11}^3 b_{11}^6 b_{20} + \\ &140\ 197\ 034\ 465\ 540\ 000 a_{11}^2 a_{20}^6 b_{20}^2 - 514\ 895\ 037\ 330\ 793\ 000 a_{11}^2 a_{20}^5 b_{11} b_{20}^2 + 131\ 347\ 049\ 089\ 986\ 750 a_{11}^2 a_{20}^4 b_{11}^2 \cdot \\ &b_{20}^2 + 1\ 325\ 551\ 974\ 238\ 038\ 375 a_{11}^2 a_{20}^3 b_{11}^3 b_{20}^2 - 1\ 641\ 896\ 241\ 856\ 490\ 250 a_{11}^2 a_{20}^2 b_{11}^4 b_{20}^2 + \\ &657\ 382\ 686\ 988\ 138\ 875 a_{11}^2 a_{20} b_{11}^5 b_{20}^2 - 76\ 242\ 692\ 386\ 703\ 250 a_{11}^2 b_{11}^6 b_{20}^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(JZ)}{\partial z} - \frac{\partial(JW)}{\partial w} &= z^{q-1} w^{p-1} \sum_{\alpha+\beta \geq 1} \{ [p\alpha - q\beta] \tilde{c}_{\alpha\beta} + \\ &\sum_{k+j \geq 3} [(\alpha + q)a_{k,j-1} - (\beta + p)b_{j,k-1}] \tilde{c}_{\alpha-k+1, \beta-j+1} \} z^\alpha w^\beta \end{aligned} \quad (33)$$

如果  $p\alpha \neq q\beta$ ，则易由式 (33) 得到式 (30)；如果  $p\alpha = q\beta$ ，则存在一个正整数  $m \geq 1$ ，其中  $\alpha = qm, \beta = pm$ ，此时等式 (23) - (30) 也成立。

**注 2** 定理 2-4 不仅揭示了鞍点量与广义奇点量之间的关系，而且揭示了计算广义奇点量的首次积分法，积分因子法和规范形法 3 种计算方法的等价性。系统 (1) 原点的广义奇点量除了常数因子之外是唯一确定的。因此，不失一般性，我们可以用  $\lambda_k$  和  $\lambda'_k$  代替  $\mu_k$ 。

**推论 2** 系统 (1) 的原点是广义中心当且仅当它有解析的积分因子。

### 3 应用举例

考虑如下以原点为共振奇点的复多项式系统

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = 3z + a_{20}z^2 + a_{11}zw, \\ \frac{dw}{dt} = -(5w + b_{11}zw + b_{20}w^2) \end{cases} \quad (34)$$

使用公式 (30) - (31) 计算系统 (34) 原点的广义奇点量，可得

**命题 1** 系统 (34) 原点的前 2 个广义奇点量是

$$\mu_1 = \frac{1}{113\ 400} PH_1 \quad (35)$$

其中

$$H_1 = 40a_{11}a_{20} + 105a_{11}b_{11} + 2a_{20}b_{20} + 39b_{11}b_{20} \quad (36)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{32\ 074\ 391\ 709\ 360\ 000\ 000} PH_2 \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned}
& 89\ 537\ 867\ 700\ 008\ 000 a_{11} a_{20}^6 b_{20}^3 + 213\ 307\ 443\ 509\ 135\ 200 a_{11} a_{20}^5 b_{11} b_{20}^3 - 323\ 734\ 372\ 107\ 274\ 200 a_{11} a_{20}^4 b_{11}^2 \cdot \\
& \quad b_{20}^3 + 592\ 845\ 231\ 648\ 985\ 650 a_{11} a_{20}^3 b_{11}^3 b_{20}^3 - 59\ 839\ 715\ 936\ 427\ 075 a_{11} b_{11}^6 b_{20}^3 - \\
& 4\ 838\ 582\ 467\ 729\ 920 a_{20}^6 b_{20}^4 - 75\ 938\ 996\ 032\ 172\ 256 a_{20}^5 b_{11} b_{20}^4 + 330\ 995\ 354\ 256\ 420\ 408 a_{20}^4 b_{11}^2 b_{20}^4 - \\
& \quad 527\ 274\ 819\ 279\ 704\ 880 a_{20}^3 b_{11}^3 b_{20}^4 + 38\ 376\ 319\ 584\ 494\ 889 a_{20}^2 b_{11}^4 b_{20}^4 - \\
& \quad 122\ 009\ 414\ 956\ 742\ 754 a_{20} b_{11}^5 b_{20}^4 + 12\ 550\ 972\ 586\ 549\ 652 b_{11}^6 b_{20}^4 \quad (38) \\
& P = a_{11} b_{11} (a_{20} - b_{11}) (a_{20} + 3b_{11}) (5a_{11} a_{20} + 2a_{20} b_{20} - 3b_{11} b_{20}) \quad (39)
\end{aligned}$$

**定理 5** 原点的前两个广义奇点量均为零当且仅当下列条件之一成立

- (i)  $a_{11} b_{11} = 0$ ;
- (ii)  $a_{11} b_{11} \neq 0, a_{20} - b_{11} = 0$ ;
- (iii)  $a_{11} b_{11} \neq 0, a_{20} + 3b_{11} = 0$ ;
- (iv)  $a_{11} b_{11} \neq 0, 5a_{11} a_{20} + 2a_{20} b_{20} - 3b_{11} b_{20} = 0$ ;
- (v)  $a_{11} b_{11} \neq 0, a_{20} + 2b_{11} = 0, 5a_{11} + 7b_{20} = 0$ ;
- (vi)  $a_{11} b_{11} \neq 0, 4a_{20} + 3b_{11} = 0, b_{20} + 2a_{11} = 0$ .

**证明** 只要将六个条件中的任一个代入前 2 个广义奇点量, 就可证明充分性。现证必要性。对于这六个条件, 前 4 个是从  $\mu_1, \mu_2$  表达中显而易见的。所以我们只需证明后 2 个。如果  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , 除前 4 个条件外, 必有  $H_1 = H_2 = 0$ 。令  $S = [H_1, H_2, a_{11}]$ , 则有

$$\begin{aligned}
S = & 7\ 087\ 500(a_{20} - 3b_{11})(a_{20} + 2b_{11})(2a_{20} + \\
& 3b_{11})(4a_{20} + 3b_{11})(17\ 704\ 960a_{20}^6 - 130\ 952\ 372 \cdot \\
& a_{20}^5 b_{11} - 666\ 797\ 256a_{20}^4 b_{11}^2 + 2\ 883\ 154\ 329a_{20}^3 b_{11}^3 + \\
& 11\ 053\ 916\ 154a_{20}^2 b_{11}^4 + 3\ 605\ 771\ 781a_{20} b_{11}^5 + \\
& 72\ 501\ 480b_{11}^6) b_{20}^4
\end{aligned}$$

如果  $H_1 = H_2 = 0$  必有  $S = 0$ 。由  $H_1 = H_2 = 0$  和  $S = 0$  我们进一步可得式 (5) 和式 (6) 以及包含在式 (4) 中的其他特殊结果。

从文 [6] 中的定理 3.2 和定理 4.1 可得

**命题 2** 系统 (34) 的原点是一个广义中心 (即, 系统 (34) 在原点可积) 当且仅当定理 5 中的六个条件之一成立。

**注 3** 在命题 2 中得到的广义中心条件与文 [9] 中的定理 4.1 的条件一致, 这证实了本文中建立的理论和公式的正确性。

#### 参考文献:

[1] 黄文韬, 刘一戎, 朱芳来. 一类微分系统无穷远点的中心与拟等时中心[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2005, 44(4): 24-27.

HUANG W T, LIU Y R, ZHU F L. The centers and quasi-isochronous centers at infinity for a class of differential systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2005, 44(4): 24-27.

[2] 李时敏. 一类不连续广义 Lienard 微分系统的极限环分支[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(5): 15-18, 27.

LI S M. Bifurcation of limit cycles for a class of discontinuous generalized Lienard differential system [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 15-18, 27.

[3] 黄赅彪, 邬华东. 平面二次系统极限环及其稳定与分岔的计算[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2008, 47(2): 28-31.

HUANG C B, WU H D. Calculation of limit cycles and their stability and bifurcations for planar quadratic differential systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2008, 47(2): 28-31.

[4] ZOLADEK H. The problem of center for resonant singular points of polynomial vector fields [J]. J Differential Equations, 1997, 137(1): 94-118.

[5] XIAO P. Critical point quantities and integrability conditions for complex planar resonant polynomial differential systems [D]. Changsha: Central South University, 2005.

[6] WANG Q, LIU Y. Linearizability of the polynomial differential systems with a resonant singular point [J]. Bull Sci Math, 2008, 132(2): 97-111.

[7] GRAVEL S, THIBAUT P. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra system with a saddle point with rational hyperbolicity ratio [J]. J Differential Equations, 2002, 184(1): 20-47.

[8] FRONVILLE A, SADOVSKI A, ZOLADEK H. Solution of the 1: -2 resonant center problem in the quadratic case [J]. Fund Math, 1998, 157(2/3): 191-207.

[9] LIU C, CHEN G, LI C. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra systems [J]. J Differential Equations, 2004, 198(2): 301-320.

[10] CHRISTOPHER C, ROUSSEAU C. Normalizable, integrable and linearizable saddle points in the Lotka-Volterra

- ra system [J]. Qual Theory Dyn Syst, 2004, 5(1): 11 – 61.
- [11] CHRISTOPHER C, MARDEŠIĆ P, ROUSSEAU C. Normalizable, integrable and linerizable saddle points for complex quadratic systems in  $C^2$  [J]. J Dyn Control Syst, 2003, 9(3): 311 – 363.
- [12] WANG Q, HUANG W. Integrability and linearizability for Lotka-Volterra systems with the  $3: -q$  resonant saddle point [J]. Adv Difference Equ, 2014, 2014(1): 23.
- [13] FERĀEC B, GINÉ J, MENCINGER M, et al. The center problem for a  $1: -4$  resonant quadratic system [J]. J Math Anal Appl, 2014, 420(2): 1568 – 1591.
- [14] DOLIĆANIN D, GINÉ J, OLIVEIRA R, et al. The center problem for a  $2: -3$  resonant cubic Lotka-Volterra system [J]. Appl Math Comput, 2013, 220(4): 12 – 19.
- [15] WANG Q, HUANG W, WU H. Linear recursion formulas of generalized focus quantities and applications [J]. Appl Math Comput, 2013, 219(10): 5233 – 5240.
- [16] GINÉ J, CHRISTOPHER C, PREŠERN M, et al. The resonant center problem for a  $2: -3$  resonant cubic Lotka-Volterra system [M]//Computer Algebra in Scientific Computing. Berlin Heidelberg: Springer, 2012, 7442(4): 129 – 142.
- [17] LIU C, LI Y. The integrability of a class of cubic Lotka-Volterra system [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2014, 19(19): 67 – 74.
- [18] HU Z, ROMANOVSKI V, SHAFER D.  $1: -3$  resonant centers on  $C^2$  with homogeneous cubic nonlinearities [J]. Comput Math Appl, 2008, 56(8): 1927 – 1940.
- [19] CHEN X, GINÉ J, ROMANOVSKI V, et al. The  $1: -q$  resonant center problem for certain cubic Lotka-Volterra system [J]. Appl Math Comput, 2012, 218(23): 11620 – 11633.
- [20] WANG Q, WU H. Integrability and linearizability for a class of cubic Kolmogorov systems [J]. Ann Differential Equations, 2010, 26(4): 442 – 449.
- [21] DONG G. Linearizability of homogeneous quartic polynomial systems with  $1: -2$  resonance [J]. J Math Anal Appl, 2012, 396(1): 215 – 224.
- [22] LIU C, CHEN G, CHEN G. Integrability of Lotka-Volterra type systems of degree 4 [J]. J Math Anal Appl, 2012, 388(2): 1107 – 1116.
- [23] GINÉ J, ROMANOVSKI V. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2010, 11(3): 2100 – 2105.